

数学分析导言

如何学习《数学分析》

- 1、做好课堂笔记,这门课我讲完全是用板书,所以,各位做好课堂笔记,课后在做作业之前最好能看一遍笔记,尽量掌握基本知识和技巧,作为基础,这门课主要考察对基本知识的认识和掌握,考试不太注重技巧,但是最核心的理论是要清楚的。
- 2、大家很快就会发现,大学一堂课的内容可能是中学阶段一个月的内容,所以进度非常快,请各位课后尽量当天复习以及写作业,如果有没有弄懂得问题最好当天就能解决,否则你很快就会是听天书的状态,无论你高考考多少分,在数学分析面前都不值一提。
- 3、你可以提前学,或者通过别的途径学习,但是不要我已经讲过一段时间了,你还在前面的章节里如泥牛前行,这样你会越落越多,当下学的东西弄不懂就寻求帮助,可以提前复习,但不是自己在前面的章节里无法自拔。同时,在后续的学习中,你也可以获得对前面学习内容的一些理解和提升!
- 4、适当寻求答案的帮助,如果一道题你认真思考了超过30分钟,就可以看答案了,没有必要花很多时间死磕。

数学分析是什么?以及为什么大家不学高数而学数学分析?

大家知道中国在历史上技术一直很发达,以四大发明为标志的一些列技术对于地球上其他国家来说都是上百年的领先,但是在近代以来,我们从各个方面都落后于西方国际。那么这是为什么?

这是一个很大的问题,肯定包括各种因素,但是对于我来说,一个很重要的因素是技术没有数学化,逻辑化!不是说大家不知道数学,也不是说我们的老祖宗没有追求科学的精神,你看看我们的历法,上千年还依然能够准确的描述自然现象!我们没有做到的是从将科学数学化,没有从数学的角度来研究和推动自然科学的发展,导致了我们在科学技术方面近代以来全方位的落后。所以,我们需要在很多问题上数学化,注意不是数字化,是数学化!数字化只是数学化的第一步,只是把它用数学的语言描述出来,数学化是让这些数字内在的规律开始运行!比如,我们的祖辈也很早掌握了月亮的运行规律,这些规律已经用来指导生产实践,比如我们的历法!但是我们的祖辈没有数学化这些规律,从而在数学的层面来解释这些现象!正是牛顿莱布尼茨发明了微积分,然后就可以从数学的角度来做更细致的刻画月球以及宇宙的运行规律!

各位未来无论从事哪个领域,能把自己专业的东西真正数学化,从数学化的角度来思考问题,就更加的本质,也才能在最核心的领域有创造和发现!当然大多数人

都是平凡人,但是我们未来学院既然叫未来学院,就希望各位承担得起未来二字,在数学基础上有更多的建树!那么肯定有同学有疑问,其他理工科专业也学高数,为什么我们学习数学分析?

这就涉及到**数学分析和高数的差异**!有可能很多同学从网上了解到,数学分析是一个比高等数学难的存在,高数都已经是高高挂在数学上了,数分还不给把你分成几瓣数不清啊?事实上,两者的追求不同,高等数学还在于已知的方法的计算,就是已经有一些积木和模具,你拿这些积木和模型搭起来东西即可,即使如此,这个积木和模型如何搭建都已经很困难了!

数学分析是什么?你如果在网上看的话,很多人告诉你就是反反复复的证明!前期是证明一些明明我知道的事情,后期证明一些我啥也不知道的东西?那么为什么有这么大的差别呢?

这要从数学的本质说起,数学是一种语言,是描述自然现象的语言,任何现象,能通过数学描述的才叫科学,不能用数学描述的,无论如何不叫做科学。因此我们学习数学分析就是在学习一门自然现象的语言,定义,就是这些自然现象的描述,定理就是这些自然现象所表现的性质,我们通过不断地练习如何表达这些语言,从而就成为一种不断说明的过程。

通过这些证明,我们要训练一种能把自然现象用符合逻辑的语言描述清楚,这种描述是需要精确的,无歧义的,以至于不用去用实验等其他方式来验证的。这就是数学的精确性和逻辑性所在!

那么作为一名未来的人工智能大师,或者其他领域内的专家,如果你想真正的讲你的专业建立在严格意义上的数学,你有必要在数学的基本逻辑和语言上进行训练,虽然我们只是一个开始,但是这也是你未来可以进行严格训练的基础。因此,我们学校希望在知其然的同时也知其所以然。知其然是高数教给你的数学,知其所以然是数分教给你的东西,无论哪一个都重要,只是我们更侧重后者!

那我说了这么多,那么数学分析到底怎么样的严格?

我们从我们都知道的一句话开始:

实数与数轴上的点一一对应!

首先这句话是我们整本书的基础,但是遗憾的是,我们并不能证明这句的正确性!但是我们的这本书的逻辑基础,另一个众所周知的基础是平面上两条平行线互不相交。这两个公理或者公设成我们后续逻辑的基础。所以,数学分析第一件事情要告诉大家的是,我们的科学是有基础的,我们现在发展起来的所有纷繁复杂的科学很大一部分都是建立在这个基础之上的!数学分析要花很大的力气来跟大家说明什么是实数集的完备性!**注意,我这里用词是说明,不是证明!**因为目前为止,我们的数学没有办法证明实数的完备性!

完备性(连续性)公理:设 X 和 Y 是实数集 $\mathbb{R}$ 的两个非空子集,并满足对任 $x \in X, y \in Y$ 都有 $x \leq y$,那么一定存在 $c \in \mathbb{R}$,对任意的 $x \in X, y \in Y$ 都有

$$x \leq c \leq y$$

这个公理描述的就是,直线是连续的,直线的两个部分之间一定被连接起来,实数也满足这个性质,这就是通过一种逻辑的语言来描述了实数与直线上的点是一一对应的。有同学可能好奇,那这不就是事实吗?为什么需要证明?

我们从实数的定义出发,在有单位长度之后,我们有了自然数进而有了所有整数。将单位尺度10等分,有了小数点后一位的小数,这个小数显然可以表达为某个以10为分母的分数。我们可以重复上述的过程,可以得到任意的有限次的小数,这些小数显然也可以写作分数!重点是我们无限次的重复下去会得到啥?无限次重复下去,我们会得到两种无限小数:无限循环小数和无限不循环小数,前者也可以写作分数。比如:

$$\frac{1}{3} = 0.33333....$$

$$1 = 0.999999....$$

它们和之前的数都属于有理数集 $\mathbb{Q}$ (rational number), 后者全体称作无理数集 (irrational number), 它连一个专属的记号都没有! 各位, 现在问题来了, 我们认识了所有的实数, 那么你能说你这个过程把所有数轴上的点都穷尽了么? 也就是这个过程我们有没有遗漏下一个或者一些数轴上的点, 他不能表示为小数呢? 这个过程并不是你直观想象就能够获得的! 事实上, 直观上讲, 所有有理数就已经很密集了, 在没有发现无理数之前, 人们事实上认为所有的有数跟数轴上的点一一对应! 所以, 这个直观不能给出正确的答案, 数学这要求对这个问题本身通过严格的逻辑来证明! 现在的问题是, 我们无法证明实数的完备性, 但是建立在此基础上的数学所刻画的自然现象是符合实际观察的, 因此我们在承认这是事实的基础上建立了《数学分析》这门课所学的所有内容!

所以数学分析培养我们言之有物的逻辑性, 我们的出发点是什么, 我们能严密的逻辑说清楚的是, 我们说不清楚的是, 这是我们要培养的数学化能力!

交代清楚了我们为什么要学数学分析，以及数学分析和高等数学的区别在于什么之后，我们来说明我们核心学习什么？你可能在很多书的封面看到这么几个公式：

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \int f(x, y) dy &= \int \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy. \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).\end{aligned}$$

我愿意称数学分析研究极限符号的穿墙术！也就是上述几个公式中极限号何以穿过函数、积分和无限求和！为此，我们需要了解极限的定义！以及什么样的函数可以允许极限号穿过去，我们还必须了解积分和无穷求和的定义，以及如何让这个极限号穿进去！这几个穿墙术在很多领域都有广泛的应用，比如第一个公式，如果你把 x 看作时间， f 看作在 x 时刻某个量的值，那么第一极限就表现为 x 时刻的量可以描述 x_0 时刻的量！显然有些时候这件事情是对的，比如动点的运动轨迹。有些时候是不对的，比如股票的价格！

我们把满足第一个公式的函数称为连续函数，大家会发现我们这门课研究最核心的就是连续函数。这个函数是微积分研究的核心对象！他建立起来一个连续的世界观！将来你们还回去学习概率论和数理统计，在那里连续函数就不再是我们研究的主要对象。如果有人还有兴趣去看看数学院的《实变函数》和《泛函分析》你会发现他们的研究对象会更复杂。但是数学分析建立起来的理论会成为这些后续课程的基础，也就是我们总有一个观察世界的立足点，又一个思维开始的地方。

我们的研究对象的核心是连续函数，我们的研究工具是极限。这是分析学科的特点，分析学科就是极限何以可能的学科。与之对应的还有代数和几何！代数研究空间或者数据的结构，比如矩阵是代数里的重要工具。几何则更加侧重于对于几何量的描述：比如曲率等等！在数学分析中，我们将不断的去理解各种极限过程，作为开始确实很痛苦，但是只有能够熟练的掌握极限过程，才能真正开启我们的数学分析之旅！