

数列的极限

本节我们讨论数列的极限！

1、数列极限的定义：

所谓数列，一系列按照正整数顺序排列的（实）数

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

通常用 $\{a_n\}$ 来表示，第 n 项 a_n 被称为这个数列的通项。

大家已经在高中的阶段接触过极限，那么为什么我们从数列的极限讲起呢？原因是数列的排序 $n \in \mathbb{N}^*$ 有一个自然的趋势，就是我们通常称的无穷大。人们很容易理解这个序列 $\{n\}$ 趋向于 ∞ 这件事情：我们用严格的数学语言表示为，对于任意的给定的 $N > 0$ ，我们都有序列 $\{n\}$ 都能超过它。所以这是一个逻辑基础！它其实就是对 ∞ 的一个描述！我们先不深入的讨论 ∞ ，我们回头还会回到这个问题来！我要跟大家说的一件事情是，这个 ∞ 不在实数轴上！

我们以 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 为例，大家知道：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

那么我们怎么理解这个极限过程的呢？就是随着 n 的增大，（或者说 $n \rightarrow \infty$ ）， $\frac{1}{n}$ 无限接近于0。大家可以注意到，无论 n 有多大，这个 $\frac{1}{n}$ 都取不到0，但是它充分接近于0。我们下面用严格的数学语言来描述这件事情，所谓千里之行始于足下：

定义1: 给定数列 $\{a_n\}$ ，如果存在实数 a 满足：对于任意给定的 $\epsilon > 0$ ，总存在一个自然数 N ，对所有的 $n > N$ ，都有

$$|a_n - a| < \epsilon$$

则称数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a ，数列 $\{a_n\}$ 是一个收敛数列， a 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限。并且我们记

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ 或 } \lim a_n = a \text{ 或 } a_n \rightarrow a, (n \rightarrow \infty)$$

用记号来表示：

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, s.t. \forall n > N, \text{ 都有: } |a_n - a| < \epsilon$$

(请大家把 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. 按照刚才的语言写一下!)

注意在定义中, ϵ 用来表示 a_n 与 a 的接近程度, 它的任意性用于描述要多接近有多接近! 请大家体会这里的数学语言的严谨性。它通过任意性, 相当于计算机里的循环, 比如当 $\epsilon = \frac{1}{2}$ 时, 有后续的结论, 当 $\epsilon = \frac{1}{100}$ 时有后续的结论, 任意性代表对任何数都满足后续的结论! 因为我们这里用来表示接近, 通常大家会认为 $0 < \epsilon < 1$.

在给定接近程度 ϵ 的情形下, N 表示下标或者极限过程的靠后指标, 它的取值依赖于 ϵ 的值, 从逻辑上就是先有 ϵ , 后有 N , 它的选取是为了后续的不等式服务的! 所有的取值都是为了

$$|a_n - a| < \epsilon$$

最后大家还要注意的, 上面这个不等式不是对某些 n 成立, 它要求只要 $n > N$, 都得成立! 因此

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, \dots \right\}$$

就不以 0 为极限!

在数轴上, 极限就表示为 **给定一个 a 的 ϵ 邻域 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, 存在 N 表示在这个精度下的靠后指标, 只要超过这个靠后指标 $n > N$, 数列中所有的点都落在 a 的 ϵ 邻域中**。因为无论 N 有多大, 不超过 N 的指标 n 都是有限的, 所以这个领域外实际上只有有限个数, 而邻域内有无穷个数列中的数!

和收敛数列相对的是 **发散数列: 即不存在一个实数 a 使得定义成立!**

大家可以试着验证上面的例子是不熟练的! 我们后面再具体讨论, 在我们讨论之前, 请大家自己试试来说明这件事情!

我们接着来看几个例子, 下面的例子不仅仅是例子, 是需要大家记住结果, 这些结果会成为我们认识更多数列的基本知识!

例1: (常数列为收敛列)

例2: 对于任意的 $\alpha > 0$, 我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$. (到这个例子的时候我们再来一起检验学生刚才的结论! 或者提前)

课堂练习: 请计算 (不写结论部分):

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3}$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{2}{2} = 1$.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$.

例4、设实数 q 满足 $|q| < 1$ ，则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

证明： $q = 0$ 是平凡的，后面证明注意取 $0 < \epsilon < 1$.

例5、对于任意的 $a \in \mathbb{Z}$ ，我们都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

证明： $\left| \frac{a^n}{n!} - 0 \right| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a| \cdot |a| \cdot |a| \cdots |a| \cdot |a|, \dots, |a|}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \lceil |a| \rceil \cdot |a| + 1, \dots, n} < |a|^{\lceil |a| \rceil} \frac{|a|}{n}$.

这里 $\lceil a \rceil$ 表示向上取整。

2、收敛数列的性质：

为了获得更一般的结论，我们有必要讨论极限的基本性质，不仅仅为了计算，请大家回顾我们第一节课提到的我们要用这个工具来研究连续函数的性质，我们必须掌握好这个工具！

定理1: (极限的唯一性) 给定数列 $\{a_n\}$ ，若实数 a 和 b 都是 $\{a_n\}$ 的极限，则 $a = b$

注：在数学运算中，唯一性很重要，如果没有某种意义上的唯一性，则该运算无法运用，就失去了定义的价值！我们这里说某种意义上的唯一性，是指在有些情况下我们可以通过一些条件来获得唯一性，比如2的平方根有两个，但是在定义算数平方根的情况下就只有一个，大家在中学阶段应该注意到这种不唯一带来的坏处，但是有了算数平方根这个概念就获得了唯一性！

证法一：在这个证明中请同学们体会 ϵ 的任意性！以及如何让两个极限过程统一！

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 > 0, s.t. \forall n > N_1$

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$

对于上述一样的 $\epsilon > 0, \exists N_2 > 0, s.t. \forall n > N_2$

$$|a_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$$

取 $N = \max(N_1, N_2)$, 则对任意的 $n > N$, 我们有

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |b - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

由 ϵ 的任意性, 可知 $a = b$ 。

注意到: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_1 > 0, s.t. \forall n > N_1$

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \Leftrightarrow a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \Leftrightarrow a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon).$$

定义2: (ϵ 邻域) 我们将开区间 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 称为点 a 的 ϵ 邻域, ϵ 称为该邻域的半径, a 是该领域的中心。

收敛数列的几何几何意义: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 当且仅当对于任意的 ϵ , 当 n 充分大的时候, 所有的 a_n 都落入到 a 的 ϵ 邻域。

证明二: 应用几何意义, 进行反证! 假设 $a \neq b$, 由于实数集的**有序性**:

$a, b \in \mathbb{R}$ 则: $a < b, a = b, a > b$ 必具其一!

我们不妨设: $a < b$, 取 $\epsilon = \frac{b - a}{2}$, 从而 a 的 ϵ 邻域和 b 的 ϵ 邻域必不相交! 此时对于充分大的 n , a_n 要同时落在两个邻域内是不可能的, 所以假设不成立!

例3: 求证: $0.\dot{9} = 1$. (放在极限的唯一性之后讲)

证明: 记 $a_1 = 0.9, a_2 = 0.99, a_3 = 0.999, \dots$ 由定义知道, $\lim a_n = 0.\dot{9}$. 另一方面,

对于任意的 $\epsilon > 0$, 取 $N = \log \left[\ln \frac{1}{\epsilon} \right] + 1$, 当 $n > N$ 时, 都有

$$|a_n - 1| < \frac{1}{10^n} < \epsilon.$$

下面的几个性质, 我称之为收敛极限对数列形态的刻画:

第一个描述了收敛到0的数列与绝对值得关系。

定理2: (收敛到0的数列) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

定义2: (有界数列) 给定数列 $\{a_n\}$, 若存在实数 M 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 有

$$a_n \leq M,$$

则称数列 $\{a_n\}$ 有上界, M 称为数列 $\{a_n\}$ 的一个上界。若存在实数 m 使得使得对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 有

$$m \leq a_n$$

则称数列 $\{a_n\}$ 有下界, m 称为数列 $\{a_n\}$ 的一个下界。若数列 $\{a_n\}$ 既有上界又有下届, 则称数列 $\{a_n\}$ 有界。等价的, 如果数列 $\{a_n\}$ 有界, 则存在 $M \geq 0$ 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 有

$$|a_n| \leq M.$$

如果一个数列只有有限个值, 那么这个数列一定是有界的, 有界数列主要是对无穷个取值的数列而言的! 有界性是一个整体概念, 区别于对于数列每一个值的描述, 而是整体上对于一个数列进行把握。

我们下面来讨论有界数列和收敛数列的关系:

定理3 (收敛数列是有界数列)

证明: 设数列 $\{a_n\}$ 是一个收敛数列, 即存在实数 a 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

由定义可以取 $\epsilon = 1$, 从而存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得 $\forall n > N$, 我们有

$$|a_n - a| < 1 \Rightarrow a - 1 < a_n < a + 1 \Rightarrow |a_n| < \max(|a + 1|, |a - 1|).$$

注意现在获得的界只在 $n > N$ 时成立。要获得整个数列的界, 我们取

$$M = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |a + 1|, |a - 1|)$$

从而 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 都有

$$|a_n| \leq M.$$

注1: 在该定理的证明中, 需要我们理解 ϵ 的任意性和确定性, 在什么情况下用任意性, 在什么情况下用确定性! 以及为了保证不等式对所有的 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立, 我们所采取的方法!

注2: 该定理说明, 对于收敛数列我们可以有一个整体上的把握。但是翻过来, 有界数列不一定收敛! 大家试着举一个例子!

除了有界的形态, 我们可以类似的获得如下的保号性的结论:

定理4 (收敛数列的局部保号性) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

(i) 若 $a > 0$, 这存在自然数 N 使得, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$.

(ii) 若 $a < 0$, 这存在自然数 N 使得, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n < 0$.

(iii) 上述论断中, 条件 $a > 0$ ($a < 0$) 不能换成 $a \geq 0$ ($a \leq 0$).

证明: (i) 和 (ii) 的证明类似, 我们只需给出 (i) 的证明。

取 $0 < \epsilon < \frac{a}{2}$, 则有极限的定义, 存在自然数 N 使得当 $n > N$ 时,

$$a_n > a - \epsilon > \frac{a}{2} > 0.$$

关于(iii), 我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. 但是通相没有保号性!

从另一个角度来看保号性:

定理4' 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

(i) 若 $a_n \geq 0$, 则 $a \geq 0$,

(i) 若 $a_n \leq 0$, 则 $a \leq 0$,

(iii) 上述论断中, 条件换成 $a_n > 0$ ($a_n < 0$), 结论也不能换成 $a > 0$ ($a < 0$).

证明: 本定理本质上是上一个定理的逆否命题。

定理4'' (收敛数列的局部保序性) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. 则

(i) 若对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $a_n \geq b_n$, 则 $a \geq b$.

(ii) 若 $a > b$, 则存在自然数 N , 使得对任意的 $n > N$ 都有 $a_n > b_n$.

证明: 本定理是四则运算和局部保号性的应用!

注: 跟局部保号性一样, 上述定理中(i) 即使 $a_n > b_n$, 也无法推出 $a > b$ 。同时

(ii) 中条件不能换成 $a \geq b$ 。

在引入极限这个运算之后，四则运算自然是最基本的考虑对象。它是我们进行数学运算的基本工具！

定理5（数列极限的四则运算） 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. 则：

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

(iii) 若 $b \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$.

注：上述的定理说明，极限符号可以穿过四则运算，前提是单独的极限是存在的！请大家思考，**假设定理条件中有一个极限不存在，上述的四则运算还成立吗？**

注：上述的四则运算可以推广到**有限(项数与 n 无关)**个极限的四则运算！

注：注意到在(iii)中当 $b \neq 0$ 时，由定理3的讨论我们知道，对于充分大的 n ，我们都有 $b_n \neq 0$ 。另外注意到，数列的极限实际上只与充分靠后（即存在 N ，当 $n > N$ ）的项有关系，所以**改变数列有限项的值不改变数列的极限**。因此我们总可以不假设 $b_n \neq 0$ 。因此 $\frac{a_n}{b_n}$ 有意义！

证明：关于(i)，只要注意到：

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

则不难写出证明，同学们可以自行补充。注意要保证两个极限过程中 ϵ 的统一性，以及 n 取值范围的一致性！

(ii)注意到

$$|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq |a_n| |b_n - b| + |a_n - a| |b|.$$

由收敛数列的局部保号性，存在 $M > 0$ ，使得

$$|a_n b_n - ab| \leq M(|b_n - b| + |a_n - a|).$$

对于任意的 $\epsilon > 0$ ，由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ，存在自然数 N_1 ，使得 $\forall n > N_1$ 都有

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

同理，**对于同一个 ϵ** ，存在 N_2 ，使得 $\forall n > N_2$ 都有

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

取 $N = \max(N_1, N_2)$ ，这对任意的 $n > N$ ，都有

$$|a_n b_n - ab| \leq M(|b_n - b| + |a_n - a|) < \epsilon.$$

(iii)我们只需证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. 为此, 我们考察

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|}.$$

由局部有界性的讨论知道, 存在自然数 N_1 , 使得 $\forall n > N_1$, 都有 $\left| \frac{b}{2} \right| \leq |b_n|$, 从而

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} \leq \frac{2|b_n - b|}{|b^2|}.$$

对任意的 $\epsilon > 0$, 存在自然数 N_2 , 使得 $\forall n > N_2$, 都有

$$|b_n - b| \leq \frac{|b|^2 \epsilon}{2}.$$

取 $N = \max(N_1, N_2)$, 则对任意的 $n > N$, 都有

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} \leq \frac{2|b_n - b|}{|b^2|} < \epsilon.$$

例6, 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2}.$$

解: 应用求和公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{2n^2} + \frac{n}{2n^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

请大家思考, 如下的证明为什么不对?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0.$$

有了四则运算, 我们可以获得如下关于收敛数列的性质和结果。

定理6 (夹逼定理) 已知三个数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 满足

$$a_n \leq b_n \leq c_n (n \in \mathbb{N}) \quad \text{且} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n,$$

则数列 $\{b_n\}$ 是收敛数列, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

注1: 本定理说明, 如果我们要验证数列 $\{b_n\}$ 的收敛性, 可以适当放缩获得上下两个控制数列。并且上下两个控制数列收敛到同一个极限, 则可以获得 $\{b_n\}$ 的

极限。这个放缩需要经验，作为初学者这是一个难点。后续在知道更多极限之后，放缩就会有更多思路。

注2: 由于数列的极限和前有限项关系不大，所以上下控制关系只要充分大之后成立即可，此时证明过程只要体现出这一点就可以了。

证明：记 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$. 由于 $a_n \leq b_n \leq c_n$ 不难验证

$$|b_n - a| \leq |a_n - a| + |c_n - a|.$$

对任意的 $\epsilon > 0$ ，存在自然数 N_1 ，使得 $\forall n > N_1$ ，我们有

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$

对于上述的 ϵ ，存在自然数 N_2 ，使得 $\forall n > N_2$ ，我们有

$$|c_n - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$

取 $N = \max(N_1, N_2)$ ，则对任意的 $n > N$ ，我们有

$$|b_n - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

常见的几个例子：

例7: 设 $\alpha > 0$ ，求极限： $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^\alpha}}$.

解：注意到：

$$1 < \sqrt{1 + \frac{1}{n^\alpha}} < 1 + \frac{1}{n^\alpha}.$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) = 1$.

所以： $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^\alpha}} = 1$.

例8: (考研常见题) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

解：两头放缩：

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

容易验证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1.$$

因此所求极限为1.

注：这里放缩有效的主要原因是每一项分母中

$$\sqrt{n^2 + k} = n\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} \approx n, 1 \leq k \leq n.$$

注：同样的上述极限不能用四则运算求解！因为所求通项里面求和的个数与 n 有关！

例9: 对任意的 $a > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

证明：首先 $a = 1$ 的情形是平凡的。 $0 < a < 1$ 的情形也可以归结为 $a > 1$ 的情形。我们只需要考虑 $a > 1$ 的情形。记： $\lambda_n = \sqrt[n]{a} - 1$. 只需证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$.

注意到：

$$a = (1 + \lambda_n)^n > 1 + n\lambda_n.$$

从而

$$0 < \lambda_n < \frac{a - 1}{n}.$$

再有夹逼定理即可获得我们所求极限。

同样的证明过程还有：

例10: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证明：略。

3、收敛数列与子列的关系

定义3：（子列）给定数列 $\{a_n\}$ ，引入新的计数序号：

$$k \rightarrow n_k \text{ 满足: } n_{k+1} > n_k$$

则数列 $\{a_{n_k}\}$ 称为 $\{a_n\}$ 的一个子列。特别的 $\{a_{2m}\}$ 和 $\{a_{2m+1}\}$ 分别称为数列 $\{a_n\}$ 的偶子列和奇子列。

注：子列 $\{a_{n_k}\}$ 不仅是集合角度从 $\{a_n\}$ 取出部分元素，它还在抽取的过程中保持了前后顺序，即**后取到的元素在原数列中也排在之前取出元素之后**。从而不难得出 $n_k \geq k$ 。

定理7（收敛数列的子列刻画） 数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a 当且仅当数列 $\{a_n\}$ 任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 都收敛到 a 。

注：这里要强调所有子列都收敛到同一个极限，而不只是某一个特殊子列收敛。

证明：由于数列本身也可以看作自身的子列，所以我们只需证明必要性。

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, s.t. \forall n > N$, 都有

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

对于任意的子列 $\{a_{n_k}\}$ ，对于上述的 ϵ ，取 $K = N$ ，这对任意的 $k > K$ ，我们有 $n_k \geq k > K = N$ 。从而

$$|a_{n_k} - a| < \epsilon.$$

命题得证。

由于一个数列的子列有无穷多个，所以我们通常不会去验证一个数列的所有子列都收敛到同一个极限。但是它通常成为验证一个数列不收敛的工具。事实上我们有如下的推论：

推论8: 给定数列 $\{a_n\}$ ，如果下属条件之一成立，则 $\{a_n\}$ 发散。

(i) 数列 $\{a_n\}$ 存在发散子列。

(ii) 数列 $\{a_n\}$ 存在两个极限不同的收敛子列。

经典的例子： $\{(-1)^n\}$ 是一个发散数列因为它的奇子列 $\{(-1)^{2m+1}\}$ 和偶子列 $\{(-1)^{2m}\}$ 分别收敛到 -1 和 1 。

由于数列的独特结构，我们还依然还能建立如下的相对方便的子列检验办法。在这个过程中我们只要检验两个特殊子列 $\{a_{2m}\}$ 和 $\{a_{2m+1}\}$ 的收敛性即可。

定理9:（数列与奇偶子列） 数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当它的偶子列 $\{a_{2m}\}$ 和奇子列 $\{a_{2m+1}\}$ 同时收敛到同一个极限。

证明：由定理7，我们只需证明充分条件。因为

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = a.$$

由极限的定义， $\forall \epsilon > 0, \exists M_1, M_2 \in \mathbb{N}^*, s.t.$

$$\begin{cases} |a_{2m} - a| < \epsilon, & m > M_1 \\ |a_{2m+1} - a| < \epsilon, & m > M_2. \end{cases}$$

取 $N = \max(2M_1, 2M_2 + 1)$ ，则 $\forall n > N$ ， n 无论是偶数或者奇数都满足上式的条件。从而有

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

命题得证。

注：从上述的定理证明可见，我们只要适当的子列，使得它们的指标包含所有自然数集，这也可以获得类似的结果例如数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当 $\{a_{3m}\}, \{a_{3m+1}\}$ 和 $\{a_{3m+2}\}$ 都收敛到同一个极限。

本节作业：习题1.2 1-14题