实数的完备性

本节我们讨论实数的完备性，关于他们的讨论有两个目的：第一、对实数集的完备性进行刻画，使得我们对实数集本身有更深刻的理解；第二、在数列极限的定义以及前面的证明过程中，很大程度上极限是已知的，**通过本节的学习，我们可以通过数列本身的一些性质来获得其敛散性！**作为初学者，我们的重点是在后者。事实上，这些刻画收敛的定理不仅仅在数列的极限中有应用，在我们后续的学习，包括更广泛的极限理论中都极其重要。

本节所涉及的一系列定理是相互等价的，我们从实数集的完备性公理开始，因为所有的描述定理都是等价的，理论上我们可以把本节的任何一个定理看作公理，然后推出其他定理。但是这些都不能作为我们对实数完备性本身的证明。

1、实数完备性公理 $\Longrightarrow$确界原理

公理 (实数的完备性)：设X和Y是实数集$\mathbb{R}$的两个非空子集,并满足对任$x \in X, y \in Y$都有$x \leq y$,那么一定存在$c \in \mathbb{R}$,对任意的$x \in X, y \in Y$都有

$$x \leq c \leq y$$

注：这个公理也称为戴德金原理。戴德金原理是戴德金(R.Dedekind)于1872年提出来的，在构造欧氏几何的公理系统时，在希尔伯特公理组Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ的基础上，阿基米德公理和康托尔公理合在一起与戴德金原理等价 。

定义1 (有界集与确界)：设集合$X \subset \mathbb{R}$，如果存在$M \in \mathbb{R}$使得对任意的$x \in X$，都有$x \leq M$, 则称M为集合X的一个**上界**，集合X有上界。进一步我们把**X集合的最小上界称为上确界**，即：如果M是集合X的一个上界，并且对任意的$\epsilon > 0$，都存在$x_0 \in X$使得

$$M - \epsilon < x_0 \leq M.$$

我们记集合X的**上确界**为$supX$。

如果存在$m \in \mathbb{R}$使得对任意的$x \in X$，都有$x \geq m$, 则称m为集合X的一个下界，集合X有下界。进一步我们把**X集合的最大下界称为下确界**，即：如果m是集合X的一个下界，并且对任意的$\epsilon > 0$，都存在$x_0 \in X$使得

$$m \leq x_0 < m + \epsilon ..$$

我们记集合X的**下确界**为$infX$。一个集合的上下确界都称为集合的确界。

注：从定义以及实数的有序性，不难看出如果一个集合有上（下）确界，则上（下）确界是唯一的。

注：设$M = supX$，不难证明$-M = \inf(-X)$. 这里$-x = \{-x, x \in X\}$. 因此上确界和下确界的很多性质是可以互相转化的。

注：确界和最值（即最大值和最小值）是有区别的，在有限集中确界和最值是一样的，但是在无限集合中确界存在不一定最值存在，但是如果有最值，则最值就是确界。例如区间$(0,1)$的上下确界分别是1和0，但是它没有最大和最小值。

定理1 (确界原理)：非空有上（下）界集合必有上（下）确界。

证明：我们只给出有上界的情形。假设$X \subset \mathbb{R}$非空且有上界，记Y为集合X的所有上界的全体。显然Y非空。从而X和Y满足实数完备性公理的条件，从而存在$c \in \mathbb{R}$使得对任意的$x \in X, y \in Y$满足

$$x \le c \le y.$$

显然c是Y中的最小值，从而c是X的最小上界，从而是其上确界。

2、确界原理 $\Longrightarrow$ 单调有界原理

定义2 (单调数列)：数列$\{a_n\}$满足$a_n \le a_{n+1}\,(n \in \mathbb{N})$，则称数列$\{a_n\}$是单调增数列。如果其中的小于等于可以换成严格小, 则称为严格增数列。类似可定义单调减数列和严格减数列。

定理2 (单调有界原理)：设数列$\{a_n\}$单调增（减）且有上（下）界，则$\{a_n\}$收敛，且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} \ \left(\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\} \right).$$

证明：不妨设数列$\{a_n\}$作为集合有无穷个数，否则从某一项开始a_n就变成了常数，从而命题成立。由于作为集合$\{a_n\}$有上界，由确界原理知其有上确界并记作a. 由上确界的定义，$\forall \epsilon > 0$，存在$N \in \mathbb{N}^*$，使得$a - \epsilon < a_N \le a$. 又因为数列$\{a_n\}$是单调增的，从而$\forall n > N$，我们都有

$$a - \epsilon < a_N \le a_n \le a.$$

命题得证！

典型例题：

例1、设$a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$($n$重根式)，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解：显然$\{a_n\}$是一个单调递增的序列，我们需要验证它是有界数列。我们用归纳法：当$n=1$时，$a_1=\sqrt{2}\le 2$. 假设$n-1$时，$a_{n-1}\le 2$。注意到

$$a_n^2=2+a_{n-1}\le 4。$$

因此我们有$a_n\le 2\ \forall n\in\mathbb{N}$。应用单调有界原理知：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在并记作$a$。再次应用等式

$$a_n^2=2+a_{n-1}\Longrightarrow a^2=2+a\,.$$

从而$a=-1,a=2$。由极限的局部保号性知所求极限为2.

重要极限:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\,.$$

我们在后续的学习中还会不断重复回到这个极限。该极限不仅在数学上有重要作用，在力学、物理学等领域也广泛出现。这里我们实际上并不能求出这个极限，我们只能说该极限是存在的，我们把这个极限记作(欧拉)自然常数e。注意欧拉常数和欧拉自然常数不是同一个数。

为此我们有两个任务：第一数列$\{e_n\}$是单调增的，第二它有上界！这里：

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

注意到：

$$\begin{aligned}
e_n=1+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{1}{n^k}&=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\\
&=1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\
&<1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\\
&=e_{n+1}
\end{aligned}$$

所以$\{e_n\}$是严格单调增的数列。

其次，注意到上式中求和部分的括号乘积都小于1，对于给定的$n\ge 2$,

$$
\begin{aligned}
e_n &= 1+\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\
&< 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} < 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} \\
&= 2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} = 3-\frac{1}{n} < 3.
\end{aligned}
$$

关于重要极限的应用：

例2、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

解：注意到

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1}.$$

应用重要极限以及极限的四则运算可知：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}.$$

例3、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{2n^3}$.

解：记$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$，则所求极限为其子列$\{a_{n^3}\}$的极限。由于：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e_n^2 = e^2,$$

所以所有求极限为e^2。

3、单调有界原理 $\Longrightarrow$ 闭区间套定理

定理3 (闭区间套定理)： 设闭区间套列$[a_n,b_n]\,(n\in\mathbb{N}^*)$满足：

(i) 单调递减：$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n],(\forall n\in\mathbb{N}^*)$;

(ii) 区间长度收缩为零：$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

则存在唯一的$\xi\in\mathbb{R}$，使得$\xi\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*}[a_n,b_n]$.

注：直观上，闭区间套定理说一族相互包含的闭区间长度不断收缩，则收缩到一个点。

注：显然上述的闭区间套不能改成开区间，或者半开半闭区间。例如开区间套$\{(0,\dfrac{1}{n})\}$没有共同的交集。（请同学们自己写证明！）

证明：由闭区间套的单调性，我们可以发现两个端点序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$分别是单调递增且有上界和单调递减序列且有下界。则由单调有界原理，$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都是收敛数列。又因为$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，所以它们有共同的极限记作$\xi$。单调有界原理还告诉我们$\xi=\sup\{a_n\}=\inf\{b_n\}$，即：

$$a_n\le\xi\le b_n$$

从而$\xi\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*}[a_n,b_n]$。假设存在$\eta\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*}[a_n,b_n]$，则

$$|\xi-\eta|\le|b_n-a_n|\,(n\in\mathbb{N})$$

两边取极限知：$|\xi-\eta|\le0$。所以$\xi=\eta$。命题得证！

4、闭区间套定理 $\Longrightarrow$ 列紧性定理

在实数集上，列紧性表现为下述的Bolzano-Weierstrass定理。

定理4 (Bolzano-Weierstrass定理)：$\mathbb{R}$上的有界无穷集合必能找到收敛列。

证明：设$X\subset\mathbb{R}$是有界集。即存在$m<M$使得对任意的$x\in X$都有
$m<x<M$.
记$[a_1,b_1]=[m,M]$，并在其中任取一个点$x_1\in X$。我们在此基础上构造$[a_2,b_2]$。为此将闭区间$[a_1,b_1]$等分为两个闭区间，则其中必有一个闭区间必然包含X中无穷个点，将此区间记作$[a_2,b_2]$，并在此区间中取一点$x_2\in X\backslash\{x_1\}$。
循环此过程，我们将得到如下的闭区间套：$\forall n\in\mathbb{N}^*$，
$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$，它们包含$X$中无穷个点。$x_n\in(X\backslash\{x_i\}_{i=1}^{n-1})\cap[a_n,b_n]$。
并且

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b_n-a_n}{2}=\cdots=\frac{b_1-a_1}{2^n}.$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. 因此存在唯一的$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 又因为$a_n\le x_n\le b_n$，由夹逼定理知，$\{x_n\}$是X中的一个收敛数列。命题得证！

注：如果X本身就是一个数列，则上述定理可描述为任何有界非空数列必包含收敛子列。
注：上述定理并不能说明原数列X是收敛的，但是它一定包含一个收敛子列。

例如：
$$\left\{1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{3},1\frac{1}{4},\cdots,1,\frac{1}{n},1,\cdots\right\}$$
尽管它本身不收敛，但是它的偶子列收敛到0。

5、列紧性定理 $\Longrightarrow$ Cauchy收敛准则

Cauchy收敛准则是除定义之外，描述数列收敛的最主要的方式。它在很多场合被用作数列收敛的定义。Cauchy收敛准则被用作数列定义的好处在于：第一、它不需要极限本身作为定义的一部分；第二、它又不像单调有界原理那样需要数列的单调性等特殊结构。特别是在抽象环境下Cauchy收敛准则更具优势。但是这里有个前提，就是所处的集合必须是完备的。在数学中，**集合的完备性就知在该集合中Cauchy收敛准则成立。**

定义5(Cauchy列)：给定数列$\{a_n\}$，如果对任意的$\epsilon > 0$，都存在$N \in \mathbb{N}^*$，使得对任意的$n, m > N$都有
$$|a_n - a_m| < \epsilon .$$
则称数列$\{a_n\}$是一个基本列或者Cauchy(数)列。

定理5(Cauchy收敛准则)：在实数集中，数列收敛$\{a_n\}$当且仅当$\{a_n\}$是一个Cauchy列。

注：Cauchy收敛准则还可描述为：数列$\{a_n\}$收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^*$，使得$\forall n > N, p \in \mathbb{N}^*$，有
$$|a_{n+p} - a_n| < \epsilon .$$
注：Cauchy收敛准则在直观上描述为，一个数列收敛，则充分靠后的两项之差可以小于实现给定个误差要求。即充分靠后全部挤在一起！

证明：收敛列$\Longrightarrow$Cauchy列：设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$。则对任意的$\epsilon > 0$，存在$N \in \mathbb{N}^*$，使得对任意的$n > N$，都有：$|a_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$。因此对任意的$n, m > N$，都有
$$|a_n - a_m| \le |a_n - a| + |a_m - a| < \epsilon .$$
所以$\{a_n\}$是一个Cauchy数列。

Cauchy列$\Longrightarrow$收敛列：设$\{a_n\}$是一个Cauchy数列。取$\epsilon = 1$，则存在$N \in \mathbb{N}^*$，使得对任意的$n > N$，都有

$$|a_n - a_{N+1}| < 1 \Longrightarrow |a_n| \le |a_{N+1}| + 1.$$

取$M = \max(|a_1|, |a_2|, \cdots |a_N|, |a_{N+1}| + 1)$，从而对任意的$n \in \mathbb{N}^*$，总有$|a_n| \le M$。即数列$\{a_n\}$是个有界数列，由列紧性知存在收敛子列$\{a_{n_k}\}$。

不妨设$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. 下面我们证明：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,.$$

因为$\{a_n\}$是一个Cauchy数列，对任意的$\epsilon > 0$，都存在$N_1 \in \mathbb{N}^*$，使得对任意的$n, m > N_1$都有

$$|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

又因为$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$，对于上述的$\epsilon > 0$，都存在$K \in \mathbb{N}^*$，使得对任意的$k > K$，从而$n_k > n_K$都有

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

注意，我们要把两个条件联系起来，取$N = \max(N_1, N_K)$，则对任意的$n > N$，我们有

$$|a_n - a| \le |a_n - a_{n_{N+1}}| + |a_{n_{N+1}} - a| < \epsilon\,.$$

命题得证！

例4：设$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$，求证数列$\{a_n\}$收敛。

证明：由Cauchy收敛准则，注意到：

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^2} &< \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)(n+k-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k-1)} - \frac{1}{(n+k)} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}\,.
\end{aligned}$$

对任意的$\epsilon > 0$，取$N = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$，则对任意的$n > N, p \in \mathbb{N}^*$，我们有

$$|a_{n+p} - a_n| < \epsilon\,.$$

从而数列$\{a_n\}$收敛。

推论：设数列$\{a_n\}$，存在$M > 0$, 使得满足$|a_n| \le \frac{M}{n^2}$。则其部分和数列

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

是收敛数列。

证明：只要注意到：

$$|S_{n+p}-S_n| \le \sum_{k=1}^{p} |a_{n+k}| < \sum_{k=1}^{p} \frac{M}{(n+k)^2}.$$

重复例4的证明就可以完成该命题的证明。

例5、求证数列$a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$是发散数列。

证明：只要说明该数列不是Cauchy数列即可。注意到：

$$|a_{n+p}-a_n| = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n+k} > \frac{p}{n+p}.$$

由p的任意性，我们可以取$p=n$ 得到：

$$|a_{n+p}-a_n| > \frac{1}{2}.$$

从而它不是Cauchy列，也就不收敛！

注：结合推论和例5，我们发现，如果一个部分和列的通项趋向于0的速度不够快，就可能导致发散。

6、Cauchy收敛准则 $\Longrightarrow$ 实数的完备性

为了完整性，我们用Cauchy收敛准则来证明实数的完备性，从而完成这七个定理循环证明。也说明了这几个定理是等价的。从而，我们可以把其中的任何一个看作是公理，然后获得其他几个定理。这里即体现了数学的严密性，由体现了数学的自由度。大家会发现，我们下面给出的证明实际上是用Cauchy收敛准则证明了闭区间套定理，再由闭区间套定理获得了实数的完备性。

实数完备性的证明：设$X, Y \subset \mathbb{R}$，且对任意的$x \in X, y \in Y$都有$x \le y$. 我们的目标是找到$c \in \mathbb{R}$，使得任意的$x \in X, y \in Y$都有$x \le c \le y$.

任取 $x_1 \in X, y_1 \in Y$，从而$x_1 \le y_1$ 。若$x_1 = y_1$，则命题得证。否则我们获得了一个闭区间$[x_1, y_1]$。

我们将区间$[x_1, y_1]$均分为二等分，如果右半区间中有X中元素，则记右半区间为$[x_2, y_2]$，否则$[x_2, y_2]$就是左半区间。取定后观察闭区间$[x_2, y_2]$，如果其中没有Y中元素，则y_2即位所求。否则我们得到的闭区间$[x_2, y_2]$满足如下的性质：

$$y_2 - x_2 = \frac{y_1 - x_1}{2}，x_2\text{是集合}Y\text{的下界，}y_2\text{是集合X的上界。}$$

我们重复上述的的过程，会有两种可能性，即，在某一次我们找到了所求的点，或者我们得到一个闭区间套$[x_n, y_n]$满足：

$$y_n - x_n = \frac{y_1 - x_1}{2^{n-1}}，x_n\text{是集合}Y\text{的下界，}y_n\text{是集合X的上界。}$$

我们来验证$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都是Cauchy列。由于对任意的$m > n$,

$$|y_m - y_n|, |x_m - x_n| \leq |x_n - y_n| = \frac{|x_1 - y_1|}{2^n}$$

因此对任意的$\epsilon > 0$，取$N = \left| \log_2 \frac{|x_1 - y_1|}{\epsilon} \right|$，则对任意的$n, m > N$，总有

$$|y_m - y_n|, |x_m - x_n| \leq |x_n - y_n| < \epsilon.$$

从而它们都是Cauchy列。由Cauchy收敛准则，分别存在$x_0, y_0 \in \mathbb{R}$是它们的极限。由极限的局部保序性，我们有$\forall x \in X, y \in Y$

$$x \leq y_0, x_0 \leq y.$$

注意到，我们事实上还有不等式:

$$|x_n - y_n| < \epsilon.$$

因此$x_0 = y_0$。即为完备性所求!

至此，我们完成了实数完备性的刻画。再次强调，这些定理的每一个都可以作为实数完备性公里的描述。我们通过循环论证来说明它们的等价性。在这些定理的学习中，要重点学习数学直观和严格数学语言的转化。更为重要的是，这些定理将构成数列以及后续极限存在的主要数学工具!